安定マッチング問題に対する近似アルゴリズム
Approximation algorithms for stable matching problems

宮崎 修一
Shuichi Miyazaki

京都大学 学術情報メディアセンター
〒606-8501 京都市左京区吉田本町
Academic Center for Computing and Media Studies
Kyoto University
Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku Kyoto 606-8501, Japan

shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

概要

安定マッチング問題は，1962 年に Gale と Shapley により提唱された配属問題である．男性と女性，病院と研修医，会社と労働者のように，二者間でのマッチングを求める際，お互いが相手に対する希望リストを提出し，その希望リストに基づいて「安定性」と呼ばれる性質を満たすマッチングを求める問題である．病院への研修医配属や生徒の学校配属をはじめ，様々な局面で利用されている問題であり，経済学，数学，計算機科学などの様々な分野で研究対象となっている．本稿では，計算機科学，特に問題の計算困難性や近似アルゴリズムの設計における既存研究の結果を，特に著者を含む研究グループがこれまでに手がけた問題を中心に紹介する．

Keywords: 安定マッチング問題，研修医配属問題，近似アルゴリズム

1 はじめに

安定マッチング問題は，1962 年に Gale と Shapley により提唱された問題である [11]．様々な拡張問題が存在するが，最も基本的な定義は以下のようになる．入力として，同数 (n とする) の男女および各個人の**希望リスト**が与えられる．希望リストとは，その個人の好みに従って異性全員を全順序で並べたリストである．**マッチング**とは，n 組の男女のペアの集合（ただし，2 つ以上のペアに含まれる人はいないもの）である．マッチング M における男性 m のパートナーを $M(m)$，女性 w のパートナーを $M(w)$ と書く．マッチング M において，ペアになっていない m と w が，(1) m は $M(m)$ より w を好む，(2) w は $M(w)$ より m を好む，の両方を満たすとき，(m, w) を M における**ブロッキングペア** と言う．この場合，m と w は今のパートナーと別れてマッチすることにより共に得をするため，自発的行動によりマッチングを壊す可能性がある．このため，ブロッキングペアを持つマッチングは**不安定**であるといわれる．逆に，ブロッキングペアを持たないマッチングを**安定マッチング**という．安定マッチングにおいては，例えば男性 m が現在のパートナーよりも好みの女性 w とペアになろうとしても，w は現状より悪くなるためこの申し出は受け入れられず，今のマッチングは

壊れない．安定マッチング問題は，与えられた入力例題から安定マッチングを求める問題である．なお，このような1対1のマッチング問題は男女を例にとり定義することが多いため，後述する多対1バージョンと区別して，特に**安定結婚問題**と言うこともある．

Gale と Shapley は，任意の入力例題に少なくとも1つの安定マッチングが存在することを示した [11]．また，Gale と Shapley は，安定マッチングを1つ見つける $O(n^2)$ 時間のアルゴリズム（**Gale-Shapley アルゴリズム**と呼ばれている）を考案した [11]．なお，後述するが，1つの例題が持つ安定マッチングは唯一とは限らず，一般には複数の安定マッチングを持つ例題が存在する．

安定マッチング問題は幅広い応用を持つ．その中でも最も有名なものが，研修医の病院配属であろう．アメリカでは，研修医と病院双方が希望リストを提出し，それに基づいた安定マッチングにより研修医の配属先を決定するシステムが，1952 年から運用されている [42]（この応用では1つの病院に複数の研修医を配属することになるが，上記の安定結婚問題を多対1に拡張した**研修医配属問題**が使われている）．ここでは，毎年約3万人の研修医と約2万の募集枠の間でのマッチングが行われている．同様のシステムはカナダ [40] やイギリス（スコットランド）[43] にも見られ，日本でも 2004 年度の配属から使われ始めている [41]．その他に，生徒の学校配属 [36, 39, 1, 2] や大学院生の研究室配属 [4]，最近では腎臓交換移植における交換ペアの決定 [35] にも応用が見られる．このように応用が広いこと，また，数学的に美しい構造を持っていることから，安定マッチング問題は，数学，経済学，計算機科学など多くの分野で研究対象となっている．また，実用上の理由から，上述したように様々な拡張モデルが考えられている．

筆者らの研究グループでは，安定マッチング問題の拡張モデルに対して計算機科学の立場から，効率の良いアルゴリズム開発や問題の計算困難性の研究を行なっている．本稿では，これまでに得られた結果，特に計算困難な問題に対する近似アルゴリズムについての結果を幾つか紹介する．なお，アルゴリズム的視点からの安定マッチング問題の研究については，文献 [14, 32] に詳しく紹介されている．

2　基本的事項

本節では，前節で述べた Gale-Shapley アルゴリズムの動作について簡単に説明する．また，近似アルゴリズムの考え方を説明する．

2.1　Gale-Shapley アルゴリズム

Gale-Shapley アルゴリズムの動作中，各人は「**フリー**」または「**婚約中**」のいずれかの状態にある．最初の時点では全員がフリーである．アルゴリズムの1ステップでは，フリーの男性（m とする）が自分の希望リストの中でトップにいる女性（w とする）にプロポーズする．w が現在フリーならば，そのプロポーズを受け入れ，(m, w) が婚約する．w が婚約中ならば，現在の相手（m' とする）と m を比べ，より好きな方と婚約する．つまり，m' の方が好きであれば m を振り m' と現在の婚約関係を続け，m の方が好きであれば m' を振り新たな婚約関係 (m, w) が成立する．この際，振られた方の男性はフリーになり，自分のリストから w を削除する（つまり，2度同じ女性にはプロポーズしない）．以上の動作をフリーの

男性がいなくなるまで続け，その時点での婚約ペアを出力するのがGale-Shapleyアルゴリズムである．以下にGale-Shapleyアルゴリズムの疑似コードを示す．

Gale-Shapley アルゴリズム

$M = \emptyset$ とし，全員をフリーにする．
while フリーの男性がいる **do**
　任意のフリー男性を m とする．
　m の希望リストの先頭の女性を w とする．
　if w がフリー **then**
　　(m, w) を M に加え，m と w を婚約中にする．
　end if
　if w が婚約中 **then**
　　w の婚約相手を m' とする．
　　if w は m より m' が好き **then**
　　　m は希望リストから w を削除する．
　　else
　　　M から (m', w) を削除し，(m, w) を加える．m' をフリーに，m を婚約中にする．
　　end if
　end if
end while
M を出力する．

2.2 近似アルゴリズム

組合せ最適化問題を解くアルゴリズムを開発する場合，そのアルゴリズムが多項式時間で動作することが望ましい．しかし，問題がNP困難であることが示された場合，その問題に対する多項式時間アルゴリズムの構築は期待できない．NP困難問題に対するアルゴリズム開発には様々なアプローチがあるが，その中でも盛んに研究されているのが**近似アルゴリズム**である．最適ではないまでも最適に出来るだけ近い解を，多項式時間で求めようというのが近似アルゴリズムの考え方である．

近似アルゴリズムの性能は**近似度**で評価される．最大化問題における近似度の定義は以下のようになる．近似アルゴリズム A の近似度（の上限）が c である（「A は c-近似アルゴリズムである」とも言う）とは，任意の入力例題 I に対して

$$\frac{opt(I)}{A(I)} \leq c$$

が成り立つということである．また，最小化問題に対しては，分子と分母を入れ替えて

$$\frac{A(I)}{opt(I)} \leq c$$

という式で定義される．ここで，$opt(I)$ は例題 I の最適解のコスト，$A(I)$ はアルゴリズム A が求める解のコストである．すなわち，アルゴリズム A は，どんな入力に対しても最適解の

c 倍以内の答を求めることができる．c は 1 以上の値をとり，小さいほどアルゴリズムの性能が良いことを表す．

3　最大サイズ安定マッチング問題

安定マッチング問題の定義において，各人は異性**全員**を**全順序**で希望リストに書かなければならなかった．しかし，例えば全国規模の研修医配属などのように大規模な配属システムを考えると，この制約は実用的でない．従って，自然な拡張として，マッチしたくない相手はリストに書かなくて良い**不完全リスト**および同程度の好みの人は同順位にして良い**同順位リスト**が考えられる．

不完全リストにおいては，リストに書いていない人とはマッチさせられないため，不完全マッチングも考える必要があり，ブロッキングペアの定義を拡張する必要がある．マッチング M に対して，(1) 男性 m と女性 w はお互いをリストに書き合っており，(2) m が独身であるか $M(m)$ よりも w を好み，かつ，(3) w が独身であるか $M(w)$ よりも m を好むとき，(m, w) を M に対するブロッキングペアと定義する．この拡張においても，安定マッチングは少なくとも 1 つ存在し，Gale-Shapley アルゴリズムの簡単な修正によりそれを求めることができる．上述したように安定マッチングは必ずしも完全マッチングとは限らないが，全ての安定マッチングにおいてマッチする男女集合が同じである（すなわち，1 つの安定マッチングでマッチする人は，他のどの安定マッチングでもマッチする）ことが知られている [12]（5 節で出てくる **Rural Hospitals Theorem** の特別な場合である）．従って，必然的に全ての安定マッチングは同サイズとなる．

同順位を許す場合は，ブロッキングペアの定義は 3 種類提案されているが [20]，ここでは最も自然な**弱安定性**を考える．これは，第 1 節に書いた定義と同じく，男女共に今のペアよりもお互いを**より好む**ものを対象とするものである．（この他に**強安定**と**超安定**という概念があり，これらは，今のパートナーと同順位の相手でもブロッキングペアの対象とするものである．）この拡張においては，入力例題の希望リスト内の同順位を任意に壊す（つまり，無理に順位をつける）ことにより得られた（拡張を許す前の）例題の安定マッチングが，そのまま現在の例題の安定マッチングになることが容易に分かる．従って，やはり安定マッチングは必ず存在し，それを $O(n^2)$ 時間で求めることが出来る．

不完全リストと同順位を両方許した場合のブロッキングペアは，上記の両拡張における場合から自然に定義できる．この場合でも安定マッチングは少なくとも 1 つ存在し，同順位を適当に壊して Gale-Shapley アルゴリズムをかけることにより，上記と同様に安定マッチングを求めることができる．しかしこの場合，マッチングのサイズについては，上記の拡張とは状況が大きく異なる．拡張を許さないオリジナルの安定マッチング問題，不完全リストのみを許す拡張，および同順位のみを許す拡張いずれにおいても，1 つの例題が持つ安定マッチングのサイズは全て同じであった．しかし，不完全リストと同順位の両方を許す今回の拡張では，1 つの入力例題に異なるサイズの複数の安定マッチングが存在する場合がある．そのような場合，（例えば研修医配属では）より多くの研修医を配属させたいというのは自然な要求であり，出来るだけ大きなサイズの安定マッチングを求めることが応用上重要となる．そこで本研究では，最大サイズの安定マッチングを求めるという最適化問題 (**MAX SMTI**; SMTI は「**S**table **M**arriage with **T**ies and **I**ncomplete lists」を意味する) を考えた．

3.1 結果の概要

まず計算困難性に関して，我々は MAXSMTI が NP 困難であることを示した．

定理 3.1 *[21] MAX SMTI* は *NP* 困難である．

MAX SMTI において，1 つの例題の持つ安定マッチングのサイズは高々2 倍しか違わないことが簡単に証明できる．従って，任意の安定マッチングを求めてそれを出力するというアルゴリズムは，2-近似アルゴリズムになっている．近似度が 2 よりも良いアルゴリズム構築の研究が行なわれたが，しばらくは 2 を真に下回るものは発見されず，漸近的には 2 になってしまう $2-o(1)$ という近似度で，$o(1)$ 部分を改良する程度に留まっていた（$2-c\frac{\log n}{n}$ [22] および $2-c\frac{1}{\sqrt{n}}$ [23]．ここで c は定数.）．これらのアルゴリズムは，任意の安定マッチングから出発して逐次的にサイズを大きくしていくという局所探索型のアルゴリズムである．現在の安定マッチングのサイズが最適解に比べて比較的小さい場合は，次のステップでより大きな安定マッチングが得られることを示すことにより，近似度の上限を与えている．この路線で改良を進め，現在のマッチングサイズがある程度大きくても次のステップで成功する手法を開発し，2007 年に初めて 2 を切る近似度 1.875 のアルゴリズムを得た [24]．

その後，2008 年に Király [30] により，Gale-Shapley アルゴリズムを改良したタイプの 5/3-近似アルゴリズムが提案された．続いて 2009 年に McDermid [34] により 1.5 へと改良され，この 1.5 が現在最良の近似度である．また，Király [31] により，近似度は同じ 1.5 であるものの，計算時間が小さく，より単純なアルゴリズムが開発された．

定理 3.2 *[34, 31] MAX SMTI* に対する多項式時間 *1.5*-近似アルゴリズムが存在する．

また，近似度の下限については以下の結果が知られている．これらの結果は，最小頂点被覆問題からのギャップ保存変換により得られている．

定理 3.3 *[38] P≠NP* ならば，任意の正定数 ϵ に対し，*MAX SMTI* に対する $(33/29-\epsilon)$-近似アルゴリズムは存在しない．

定理 3.4 *[38] Unique Games Conjecture* が正しければ，任意の正定数 ϵ に対し，*MAX SMTI* に対する $(4/3-\epsilon)$-近似アルゴリズムは存在しない．

次に，同順位を片側のみに許す特別な場合を考える（これを MAX SMTI 1T と書く）．当然一般の 1.5-近似アルゴリズムはこの場合にも通用するので，近似度の上限 1.5 は一般の結果から導くことが出来るが，それよりも僅かに良い近似度のアルゴリズムが存在する．

定理 3.5 *[27] MAX SMTI 1T* に対する多項式時間 *25/17*-近似アルゴリズムが存在する．

このアルゴリズムは，Király のアルゴリズム [30] に線型計画緩和を組み合わせたものである．また，近似度の下限については以下の結果が知られている．

定理 3.6 *[15] P≠NP* ならば，任意の正定数 ϵ に対し，*MAX SMTI 1T* に対する $(21/19-\epsilon)$-近似アルゴリズムは存在しない．

定理 3.7 *[15] Unique Games Conjecture* が正しければ，任意の正定数 ϵ に対し，*MAX SMTI 1T* に対する $(5/4-\epsilon)$-近似アルゴリズムは存在しない．

4　男女平等安定マッチング問題

異性全員を全順序でリストに書くオリジナルの問題を考える．前述したように，Gale-Shapley アルゴリズムを使えば安定マッチングを $O(n^2)$ 時間で求めることができる．しかし，Gale-Shapley アルゴリズムにより求められた解は，全ての男性は可能なパートナーの中で最良の女性を得，全ての女性は可能なパートナーの中で最悪の男性を得るという性質を持つ [11]．ここで言う「可能なパートナー」とは，複数存在しうる安定マッチングのいずれかにおいてパートナーとなる異性を意味する．このようなマッチングを**男性最適安定マッチング** (かつ**女性最悪安定マッチング**) と呼ぶ．また，Gale-Shapley アルゴリズムにおいて，男性と女性の役割を交換することにより，**女性最適安定マッチング** (かつ**男性最悪安定マッチング**) が求まる．

一般社会においては，病院や会社などの組織より研修医や労働者などの個人に，より利益がもたらされるべきだという考え方が主流である．このように非対称な参加者を対象とする場合は，例えば研修医配属では研修医最適安定マッチングを求めることにより，目的を達成できる．しかし，男性最適や女性最適な安定マッチングは極端であり，全参加者（または両サイド）を平等に扱う応用においては都合が悪い．そのため，ある程度公平な安定マッチングを求めるという問題が考案されている．公平さの尺度は様々考えられるが，自然なものとして以下の 3 つが広く知られている．

安定マッチング M において，人物 p がマッチしている相手の（p の希望リスト上での）順位を $c_M(p)$ と表す．これはある意味，p の**不満度**を表しているとも言える．X を男性集合，Y を女性集合としたとき，

$$C(M) = \sum_{p \in X \cup Y} c_M(p)$$

が最小となる M を求める問題を**最小不満度安定マッチング問題**という．すなわち，全員の不満度の総和を最小化する問題である．

$$R(M) = \max_{p \in X \cup Y} c_M(p)$$

が最小となる M を求める問題を**最小後悔安定マッチング問題**という．最も不満な人の不満度を最小化する問題である．

$$D(M) = \sum_{p \in X} c_M(p) - \sum_{p \in Y} c_M(p)$$

とし，$|D(M)|$ が最小となる M を求める問題を**男女平等安定マッチング問題**という．男性の不満度の総和と女性の不満度の総和を出来るだけ近づける問題である．

これらの問題は，全ての安定マッチングを列挙し，その中で最良のものを選べば最適解を求めることができる．しかし，一般に安定マッチングは入力サイズの指数個あり [18, 5, 37]，そのようなアルゴリズムは多項式時間では動作しない．それにも関わらず，全ての安定マッチングからなる束構造を利用することにより，最小不満度安定マッチング問題と最小後悔安定マッチング問題は多項式時間で最適解を得ることができる [19, 13, 8, 9]．しかし，男女平等安定マッチング問題は NP 困難であることが示されている [28].

4.1　結果の概要

我々は，男女平等安定マッチング問題に対して，以下の近似問題 (NSE と呼ぶ) を定義した．入力として，安定マッチング問題の例題 I と正数 ϵ が与えられる．I が $|D(M)| \leq \epsilon\Delta$ を満たす安定マッチング M を持つならば，そのようなマッチングの 1 つを出力し，持たないならば「持たない」と答える．ここで Δ は男性最適マッチングを M_0，女性最適マッチングを M_z として，$\Delta = \min\{|D(M_0)|, |D(M_z)|\}$ で定義される．つまり，$\epsilon = 1$ の場合は男性最適安定マッチングと女性最適安定マッチングを求め，$|D(M)|$ 値の小さい方を出力すれば良い．ϵ が小さいほど，より男女平等性が近い解を求めることになる．我々は，NSE に対して以下の結果を得た．

定理 4.1 *[25] NSE に対する $O(n^{3+\frac{1}{\epsilon}})$ 時間アルゴリズムが存在する．*

なお，男女平等安定マッチング問題では，最適解のコストが 0 となる場合があり，従来の近似度の定義では値が発散してしまうため，このような評価を行なった．

本結果も，安定マッチング全体が成す束構造を利用することにより得られている．その概要を以下に述べる．安定マッチングの例題 I に対して，**ローテーション半順序集合** $(\Pi, \prec)$ が一意に決まる．Π の要素は**ローテーション** と呼ばれ，あるマッチングに対して一部の男女間のペアを入れ換える操作に対応している．$R \subseteq \Pi$ が，任意の 2 要素 $\rho, \rho' \in \Pi$ について「$\rho \in R$ かつ $\rho' \prec \rho$ ならば $\rho' \in R$」を満たすとき，R は $(\Pi, \prec)$ の**閉じた部分集合**であるという．I の任意の安定マッチングと，$(\Pi, \prec)$ の閉じた部分集合の間には 1 対 1 対応がある．すなわち，男性最適安定マッチング M_0 に対して，閉じた部分集合 R に含まれるローテーションの操作を加えていくと，安定マッチング M_R が得られる．特に，$R = \emptyset$ の場合は M_R は男性最適安定マッチング M_0 であり，$R = \Pi$ の場合は M_R は女性最適安定マッチング M_z である．

ローテーションは男女間のペアの入れ換えであるので，ローテーション ρ により安定マッチングの $D(M)$ 値が増加する量が一意に定まる．これを $d(\rho)$ と書くことにし，

$$d(R) = \sum_{\rho \in R} d(\rho)$$

とする．このとき，これまでの議論から，閉じた部分集合 R に対応する安定マッチング M_R は $D(M_R) = D(M_0) + d(R)$ を満たす．従って，我々の問題は，$|D(M_0) + d(R)| \leq \epsilon\Delta$ となる閉じた部分集合 R を探すことと等価である．全ての R を試すと指数時間になるが，近似解を求めるためには

(1) $d(\rho)$ のある程度大きな ρ についてのみ，組合せを試せば良い，

(2) (1) について全組合せを試す必要はなく，ある個数以下の全組合せを試せば良い

ことを示し，これにより計算時間を削減した．

次に，NSE の拡張問題を考えた．NSE において，条件を満たす安定マッチングが複数存在し，かつ，それらの $C(M)$ 値が大きく異なる場合がある．例えば $|D(M_1)| = |D(M_2)| = 0$ だが，$C(M_1) = \Theta(n)$，$C(M_2) = \Theta(n^2)$ であるような安定マッチング M_1 と M_2 を持つ例題を容易に構成することが出来る（[25] 参照）．従って，男女平等性の条件を満たす中で最小不満度の安定マッチングを求める問題を考えるのは自然である．我々は MinESE という問題を以下のように定義した．入力として，安定マッチング問題の例題 I と正定数 ϵ が与えられる．I が $|D(M)| \leq \epsilon\Delta$ を満たす安定マッチング M を持つならば，そのようなマッチングの

中で $C(M)$ 値が最小のものを出力し，持たないならば「持たない」と答える．この問題に対する困難性と近似アルゴリズムについて，以下の結果を得た．

定理 4.2 *[25] MinESE* は *NP* 困難である．

定理 4.3 *[25] MinESE* に対する $O(n^{3+2(\frac{1+\epsilon}{\delta})})$ 時間で動作する $(2-\frac{\epsilon-\delta}{2+3\epsilon})$-近似アルゴリズムが存在する．ここで，$\delta$ は $0<\delta<\epsilon$ を満たす正数である．

5 配属数下限付き研修医配属問題

研修医配属問題は安定結婚問題の多対 1 への拡張である．男性を研修医，女性を病院とみなし，研修医は病院を，病院は研修医を希望リスト上で順序付けする（安定結婚問題と違い，研修医配属問題はオリジナルの問題で不完全リストを許すことになっている）．さらに，各病院は受け入れ可能な研修医の上限値を宣言する．ここでは，(i) 各研修医の配属先は高々 1 つであり，(ii) 各病院に配属される研修医数はその病院の宣言した上限値以内である，という条件を満たす配属を**マッチング**と呼ぶ．マッチング M において，研修医 r が配属されている病院（もし存在すれば）を $M(r)$，病院 h に配属されている研修医の集合を $M(h)$ と書く．

マッチング M において，研修医 r は病院 h に配属されていないが，(1) r も h もお互いを希望リストに書き合っている，(2) r はどこにも配属されていないか，または，r は $M(r)$ よりも h を好む，(3) h への配属者数が上限に達していないか，または，h が r よりも下位に書いている研修医が $M(h)$ 中にいる，の 3 条件を満たすとき，(r,h) を M の**ブロッキングペア**と言う．ブロッキングペアを含まないマッチングが**安定マッチング**であり，研修医配属問題も同様に，与えられた入力から安定マッチングを求める問題である．研修医配属問題においても安定結婚問題の様々な性質が成り立つことが知られている [14]．例えば，全ての例題に少なくとも 1 つの安定マッチングが存在し，Gale-Shapley アルゴリズムによりそのうちの 1 つを求めることができる．

研修医配属問題は，前述したように，様々な国で実際に研修医を配属するのに使われており，日本でも 2004 年度の配属からマッチング方式が使われるようになった．しかし最近，以下のような問題が生じている．日本の研修医マッチングでは定員総数 10,500 に対して研修医が 8,500 人しかおらず，多くの研修医は都市部の病院を希望するため，地方の病院に配属される研修医が必然的に少なくなる．安定マッチングは複数存在し得るのだから，できるだけ多くの人が地方の病院へ配属されるものを選ぶというのは一案だが,「どの安定マッチングでも，各病院へ配属される研修医の数は同じ」という **Rural Hospitals Theorem** と呼ばれる定理 [12] が知られており，配属人数の観点からはどの安定マッチングを選んでも同じである．この問題を解消するために，現在は都市部の病院の定員数を引き下げるという政策が採られているが，より直接的な対処法として，各病院の最低配属人数を保証するという考え方もある．

そこで我々は，各病院に対して配属数を保証するモデルを提案した．すなわち，各病院が配属者数の上限のみでなく，**下限**をも宣言できるようにし，上記 (ii) のマッチングの条件を「(ii’) 各病院に配属される研修医数はその病院の宣言した下限値以上，上限値以下である」と変更する．このような設定の下で安定マッチングを求める問題を，**HRMQ**（**H**ospitals/**R**esidents Problem with **M**inimum **Q**uota）と呼ぶ [16]．

5.1 結果の概要

Rural Hospitals Theorem から，下限を無視した通常の研修医配属問題の安定マッチングは，各病院への配属数が一定である．したがって，ある 1 つの安定マッチングを求めて，それが全ての病院の上下限を満たしていれば求める解であるし，満たしていなければ上下限を満たす安定マッチングは存在しないと結論づけられるので，HRMQ はこの観点からは容易に解ける．しかし現実には，解が存在しない場合にも何らかの答を得る必要がある．そこで本研究では，上下限を満たすマッチングの中で「**できるだけ安定**」なマッチングを求める問題を 2 つ提案し，その計算量や近似可能性について論じた．

1 つ目は，ブロッキングペア数が最小のマッチングを求める問題（**Min-BP HRMQ**）である．この問題に対して，我々は以下の結果を得た．以下では H と R はそれぞれ病院集合と研修医集合を表す（従って，$|H|$ は病院数，$|R|$ は研修医数である）．まず，Min-BP HRMQ が NP 困難であり，近似も困難であることを示した．

定理 5.1 *[16] P≠NP ならば，任意の正定数 ϵ に対し，Min-BP HRMQ に対する多項式時間 $(|H|+|R|)^{1-\epsilon}$-近似アルゴリズムは存在しない．*

この困難性は，全ての病院の定員上限が 1 であり，全ての病院の希望リストが同一であり，かつ，全ての病院および全ての研修医の希望リストが完全リストである場合でも成り立つ．一方，この近似度の下限をほぼタイトに達成する近似アルゴリズムも得た．

定理 5.2 *[16] Min-BP HRMQ に対する多項式時間 $(|H|+|R|)$-近似アルゴリズムが存在する．*

2 つ目の問題は，ブロッキングペアに関わる研修医数が最小のマッチングを求める問題（**Min-BR HRMQ**）である．本問題も同様に，多項式時間アルゴリズムが存在しそうにないことを示した．

定理 5.3 *[16] Min-BR HRMQ は NP 困難である．*

この困難性は，全ての病院の希望リストが同一であり，かつ，全ての病院および全ての研修医の希望リストが完全リストである場合でも成り立つ．また，近似可能性に関しては以下の結果を得た．

定理 5.4 *[16] Min-BR HRMQ に対する多項式時間 $\sqrt{|R|}$-近似アルゴリズムが存在する．*

なお，近似困難性に関しては，Min-BP HRMQ ほどの強い結果ではないが，密な部分グラフ問題（DkS）の近似困難性に基づく Min-BR HRMQ の近似困難性を示した．DkS とは，入力として無向グラフ G と正整数 k が与えられ，k 頂点からなる G の誘導部分グラフの中で枝数が最大のものを求める問題である．DkS の現在最良の近似度は $|V|^{1/4+\epsilon}$ であり [6]，DkS は多項式時間近似スキーム（PTAS）を持たないであろうと予想されている [10, 29]．

定理 5.5 *[16] Min-BR HRMQ が多項式時間 c-近似アルゴリズムを持つならば，任意の正定数 ϵ に対して，DkS が多項式時間 $(1+\epsilon)c^4$-近似アルゴリズムを持つ．*

6 プロジェクト–学生配属問題

大学などにおいては，いくつか用意された課題（プロジェクト）の中から各学生がどれか1つを選択するというプロジェクト科目を提供している学科もある．学生や教師の希望に基づき学生をプロジェクトへ割り当てるという応用を考慮し，研修医配属問題を拡張した**プロジェクト–学生配属問題**（SPA）が考案されている [3]．この問題では，学生と教師がおり，教師はプロジェクトを提供している．(1 人の教師が複数のプロジェクトを提供しても良い.）各プロジェクトには，それを取ることの出来る学生数の上限が設定されている．また，各教師も，自分の提供するプロジェクトに割り当てられる合計人数の上限が設定されている．各学生は，自分の取りたいプロジェクトを全順序で並べた希望リストを持っている．教師は，自分の提供するプロジェクト（のいずれか）を希望する学生に対する希望リストを持っている．

全ての教師とプロジェクトの定員上限を満たす配属を**マッチング**と呼ぶ．マッチング M において，以下の条件を満たす学生とプロジェクトのペア (s, p) を M に対する**ブロッキングペア**という．なお，以下ではプロジェクト p を担当する教師を ℓ とする．また，p に配属されている学生数が p の許容上限に達している場合，p は**満員**であると言い，同様に，ℓ に配属されている学生数が ℓ の許容上限に達している場合，ℓ は**満員**であると言う．

1. s は p を希望リストに書いている．

2. s はどこにも配属されていないか，配属されているプロジェクトよりも p を好む．

3. 以下の (a), (b), (c) のうちのいずれかが成り立つ．

- **(a)** p も ℓ も満員ではない．
- **(b)** p は満員ではないが，ℓ は満員である．かつ，s が ℓ の提供する（p 以外の）プロジェクト p' に配属されている，または，ℓ は自分のプロジェクトに配属されている中で最下位の学生 (s') よりも s を好む．
- **(c)** p は満員であり，ℓ は s に配属された中で最下位の学生 (s') よりも s を好む．

上記の 2 は，s は現状よりも p に配属されたいという条件を表している．3 は，ℓ が s を p に受け入れることにより，ℓ が現状よりも良くなる（または変わらない）という条件を表す．(a) の場合は，p にも ℓ にも受け入れる余地があるため，そのまま s を受け入れれば良い．(b) の場合は，s を p' から p に移してやることにより，ℓ は現状を維持できる．また，s が他の教師のプロジェクトに配属されている場合でも，ℓ が s' を断ることにより定員を確保し，s を受け入れることが出来，現状よりも良くなる．最後に (c) の場合は，s' を断ることにより p に空き定員を作るり，s を受け入れることが出来る．

ブロッキングペアを持たないマッチングを**安定マッチング**という．Abraham ら [3] は，任意の例題に安定マッチングが存在することを示し，安定マッチングを求める線形時間のアルゴリズムを考案した．また，1 つの例題に対する安定マッチングのサイズ（配属される学生数）は同一であることも示した．

Manlove と O'Malley [33] は，SPA の一種である SPA-P という問題を提案した．SPA では各教師が学生に対する希望リストを有していたが，SPA-P では教師は自分の担当するプロジェクトに対して希望リストを持つ．SPA と同様に，全ての教師とプロジェクトの上限値を

満たす配属を**マッチング**と呼び，マッチング M において，以下の条件を満たす学生とプロジェクトのペア (s, p) を M に対する**ブロッキングペア**という．以下ではプロジェクト p を担当する教師を ℓ とする．

1. s は p を希望リストに書いている．

2. s はどこにも配属されていないか，配属されているプロジェクトよりも p を好む．

3. p は満員でなく，以下の (a), (b), (c) のうちのいずれかが成り立つ．

(a) s が ℓ の提供する（p 以外の）プロジェクト p' に配属されており，ℓ は p' よりも p を好む．

(b) s は ℓ の提供するプロジェクトには配属されておらず，ℓ は満員でない．

(c) (c-i) s は ℓ の提供するプロジェクトには配属されていない，かつ，(c-ii) ℓ は満員である，かつ，(c-iii) ℓ の提供するプロジェクトで，学生が少なくとも 1 人配属されている中で ℓ にとって最下位のプロジェクトを p' とすると，ℓ は p' よりも p を好む．

1 と 2 の条件は SPA と同じなので，3 について説明する．(a) では s を p' から p に移すことにより，ℓ は自分の好みのプロジェクトの人数が増えるので，現状よりも良くなる．(b) の場合は ℓ も p も満員ではないので，p に s を新たに受け入れることが出来，受講者数が純増するので現状よりも良くなる．(c) の場合は p' から学生を 1 人断わり，s を p に受け入れることにより，自分のより好きなプロジェクトの受講生数が増えるので，現状よりも良くなる．

ブロッキングペアを持たないマッチングを**安定マッチング**という．Manlove と O'Malley [33] は，SPA の場合と違い，同じ例題に異なるサイズの安定マッチングが存在することを示し，最大サイズの安定マッチングを求める問題 MAX-SPA-P を提案した．また，彼らは MAX-SPA-P が APX 困難であることを示し，MAX-SPA-P に対する 2-近似アルゴリズムを提案した．

6.1 結果の概要

我々は，近似可能性と不可能性を以下のように改良した．

定理 6.1 *[26] MAX-SPA-P に対する 1.5-近似アルゴリズムが存在する．*

この結果は，Manlove と O'Malley [33] のアルゴリズムに対して，3 節で紹介した Király [30] による MAX SMTI 1T に対する 1.5-近似アルゴリズムのアイデアを加えることにより得られた．また，同様に MAX-SPA-P と MAX SMTI 1T の類似性を利用し，MAX SMTI 1T から MAX-SPA-P への多項式時間変換を与えることにより，以下の近似不可能性の結果を得た．

定理 6.2 *[26] P≠NP ならば，任意の正定数 δ に対して，MAX-SPA-P に対する多項式時間 $(21/19-\delta)$-近似アルゴリズムは存在しない．*

定理 6.3 *[26] Unique Games Conjecture が正しければ，任意の正定数 ϵ に対し，MAX-SPA-P に対する多項式時間 $(5/4-\epsilon)$-近似アルゴリズムは存在しない．*

7　最大サイズ最小不安定度マッチング問題

3 節で述べた安定結婚問題の拡張のうち，不完全リストのみを許す問題（これを SMI（**S**table **M**arriage with **I**ncomplete lists）と呼ぶ）について考える．この拡張では，異性全員を希望リストに書くのではなく，ペアになりたくない相手はリストに書かなくて良いため，不完全マッチングも考慮する必要があり，ブロッキングペアの定義を修正する必要がある．以下にその定義を再掲する．マッチング M においてペアになっていない男性 m と女性 w について，(i) m と w はお互いを希望リストに書き合っている，(ii) m は M で独身であるか，$M(m)$ より w を好む，(iii) w は M で独身であるか，$M(w)$ より m を好む，の 3 つ全てが成り立つとき，(m, w) を M に対する**ブロッキングペア**と定義する．この定義の下でブロッキングペアの存在しないマッチングが**安定マッチング**である．前述したように，この拡張においても，任意の例題が安定マッチングを少なくとも 1 つ持ち，それを多項式時間で見つけられる．また，1 つの例題に複数安定マッチングが存在する場合でも，それらは全て同サイズであることが知られている [12].

しかし，SMI 例題において，一般に最大マッチングは安定マッチングよりも大きく，安定性を多少犠牲にしてでも大きなサイズのマッチングを求めたい応用も考えられる．ただし，そのような場合でも，出来るだけ安定性を保ちたいのが自然である．Biró ら [7] はこのような問題を **MAX SIZE MIN BP SMI** という最適化問題として定式化した．MAX SIZE MIN BP SMI は，入力として SMI と同じ例題が与えられ，最大サイズのマッチングの中で出来るだけブロッキングペア数の少ないものを求める問題である．また，正定数 p と q に対して，MAX SIZE MIN BP (p, q)-SMI は男性の希望リストの長さが p 以下で，女性の希望リストの長さが q 以下に制限された問題である．また，$p = \infty$，$q = \infty$ と書いた場合は，希望リストの長さに制限がないことを表す．

Biró らは，文献 [7] において，以下の結果を示した．

定理 7.1 *[7] MAX SIZE MIN BP (∞, ∞)-SMI* は *NP* 困難であり，*P≠NP* ならば，任意の正定数 ε に対して $n^{1-\varepsilon}$ で近似不可能である．

定理 7.2 *[7] MAX SIZE MIN BP (3, 3)-SMI* は *APX* 困難であり，*P≠NP* ならば，任意の正定数 ϵ に対して $(\frac{3557}{3556} - \epsilon)$–近似アルゴリズムは存在しない．

定理 7.3 *[7] MAX SIZE MIN BP (2, ∞)-SMI* に対する $O(n^3)$ 時間アルゴリズムが存在する．

7.1　結果の概要

本研究では，定理 7.2 の近似不可能性を以下のように改良した．

定理 7.4 *[17] P≠NP* ならば，任意の正定数 $\varepsilon > 0$ に対して，*MAX SIZE MIN BP* $(3, 3)$*-SMI* に対する多項式時間 $n^{1-\varepsilon}$–近似アルゴリズムは存在しない．

本研究で用いた手法は，文献 [7] で示された定理 7.1 の証明を元にしている．文献 [7] においては，ごみ集めガジェットおよび近似不可能性のギャップ増幅用ガジェットの作成のため，一部の希望リストの長さを制限することが出来なかった．本研究では，同じ機能を持つガジェットが長さ 3 以下の希望リストで実現できることを示すことにより，改良を達成した．

8　おわりに

本稿では，計算機科学の分野において，特に近似アルゴリズムの観点から行なわれている安定マッチング問題の研究例を紹介した．本稿では紹介できなかったが，これ以外にも様々な最適化問題が提案され，アルゴリズム開発，計算困難性，近似困難性が研究されている．特に最近では,（安定性に限らず），希望リストに基づいてマッチングを求めるという問題が盛んに研究されている．安定マッチングを含め，このようなマッチングアルゴリズムの研究動向は，最近出版された本 [32] に詳しく紹介されている．

謝辞． 本研究は科研費 (15700010, 17700015, 20700009, 24500013) の助成を受けたものである．

参考文献

[1] A. Abdulkadiroğlu, P. A. Pathak, and A. E. Roth, "The New York City high school match," American Economic Review, Vol.95, pp. 364–367, 2005.

[2] A. Abdulkadiroğlu, P. A. Pathak, A. E. Roth, and T. Sönmez, "The Boston public school match," American Economic Review, Vol.95, pp. 368–371, 2005.

[3] D. J. Abraham, R. W. Irving and D. F. Manlove, "Two algorithms for the Student-Project Allocation problem," *Journal of Discrete Algorithms*, Vol. 5(1) pp. 73–90, 2007.

[4] D. J. Abraham, R. W. Irving and D. F. Manlove, "Two algorithms for the Student-Project Allocation problem," *J. Discrete Algorithms*, Vol.5, No.1, pp. 73–90, 2007.

[5] A. T. Benjamin, C. Converse and H. A. Krieger, "How do I marry thee? Let me count the ways," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.59, pp. 285–292, 1995.

[6] A. Bhaskara, M. Charikar, E. Chlamtac, U. Feige, and A. Vijayaraghavan, "Detecting high log-densities – an $O(n^{1/4})$ approximation for densest k-subgraph," *Proc. ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC 2010)*, pp. 201–210, 2010.

[7] P. Biró, D. F. Manlove, and S. Mittal, "Size versus stability in the marriage problem," *Theoretical Computer Science*, Vol. 411(16-18), pp. 1828–1841, 2010.

[8] T. Feder, "A new fixed point approach for stable networks and stable marriages," *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 45, pp. 233–284, 1992.

[9] T. Feder, "Network flow and 2-satisfiability," *Algorithmica*, Vol. 11, pp. 291–319, 1994.

[10] U. Feige, "Relations between average case complexity and approximation complexity," *Proc. ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC 2002)*, pp. 534–543, 2002.

[11] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol.69, pp. 9–15, 1962.

[12] D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.11, pp. 223–232, 1985.

[13] D. Gusfield, "Three fast algorithms for four problems in stable marriage," *SIAM Journal on Computing*, Vol. 16, Issue 1, pp. 111–128, 1987.

[14] D. Gusfield and R. W. Irving, "The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms," MIT Press, Boston, MA, 1989.

[15] M. M. Halldórsson, K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, "Improved approximation results for the stable marriage problem," *ACM Transactions on Algorithms*, Vol. 3(3), Article No. 30, 2007.

[16] K. Hamada, K. Iwama, and S. Miyazaki, "The Hospitals/Residents problem with quota lower bounds," *Proc. European Symposium on Algorithms (ESA) 2011*, LNCS 6942, pp. 180–191, 2011.

[17] K. Hamada, K. Iwama, and S. Miyazaki, "An improved approximation lower bound for finding almost stable maximum matchings," *Information Processing Letters*, Vol.109, Issue 18, pp. 1036-1040, 2009.

[18] R. W. Irving and P. Leather, "The complexity of counting stable marriages," *SIAM Journal on Computing*, Vol.15, pp. 655–667, 1986.

[19] R. W. Irving, P. Leather and D. Gusfield, "An efficient algorithm for the "optimal" stable marriage," *Journal of the ACM*, Vol. 34, pp. 532–543, 1987.

[20] R. W. Irving, "Stable marriage and indifference," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.48, pp. 261–272, 1994.

[21] K. Iwama, D. F. Manlove, S. Miyazaki, and Y. Morita, "Stable marriage with incomplete lists and ties," *Proc. International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP) 99*, LNCS 1644, pp. 443–452, 1999.

[22] K. Iwama, S. Miyazaki and K. Okamoto, "A $(2 - c \log N/N)$-approximation algorithm for the stable marriage problem, *IEICE Transactions*, 89-D(8), pp. 2380–2387, 2006.

[23] K. Iwama, S. Miyazaki, N. Yamauchi, "A $(2 - c\frac{1}{\sqrt{N}})$-approximation algorithm for the stable marriage problem," *Algorithmica*, Vol. 51, pp. 342–356, 2008.

[24] K. Iwama, S. Miyazaki, N. Yamauchi, "A 1.875-approximation algorithm for the stable marriage problem," *Proc. ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA) 2007*, pp. 288–297, 2007.

[25] K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, "Approximation algorithms for the sex-equal stable marriage problem," *ACM Transactions on Algorithms*, Vol. 7(1), Article No. 2, 2010.

[26] K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, "Improved approximation bounds for the Student-Project Allocation Problem with preferences over projects," *Journal of Discrete Algorithms*, Vol. 13, pp. 59–66, 2012.

[27] K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, "A 25/17-approximation algorithm for the stable marriage problem with one-sided ties," *Algorithmica*, to appear.

[28] A. Kato, "Complexity of the sex-equal stable marriage problem," *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics (JJIAM)*, Vol. 10, pp. 1–19, 1993.

[29] S. Khot, "Ruling out PTAS for graph min-bisection, densest subgraph and bipartite clique," *Proc. IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2004)*, pp. 136–145, 2004.

[30] Z. Király, "Better and simpler approximation algorithms for the stable marriage problem," *Algorithmica* 60(1) pp. 3–20, 2011.

[31] Z. Király, "Linear time local approximation algorithm for maximum stable marriage," *Proc. the Second International Workshop on Matching Under Preferences (MUTCH-UP 2012)*, pp. 93–110, 2012.

[32] D. F. Manlove, "Algorithmics of Matching under Preferences," World Scientific, 2013.

[33] D. F. Manlove, and G. O'Malley, "Student-project allocation with preferences over projects," *Journal of Discrete Algorithms* Vol. 6(4) pp. 553–560, 2008.

[34] E. McDermid, "A 3/2-approximation algorithm for general stable marriage," *Proc. International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP) 2009*, LNCS 5555, pp. 689–700, 2009.

[35] A. E. Roth, T. Sonmez, and M. U. Unver, "Pairwise kidney exchange," *Journal of Economic Theory*, Elsevier, Vol. 125, No. 2, pp. 151–188, 2005.

[36] C.P. Teo, J.V. Sethuraman and W.P. Tan, "Gale-Shapley stable marriage problem revisited: strategic issues and applications," *Proc. Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO) 99*, LNCS 1610, pp. 429-438, 1999.

[37] E. G. Thurber, "Concerning the maximum number of stable matchings in the stable marriage problem," *Discrete Mathematics*, Vol.248, pp. 195–219, 2002.

[38] H. Yanagisawa, "Approximation algorithms for stable marriage problems," PhD thesis, Kyoto University, Graduate School of Informatics, 2007.

[39] 安田洋祐, "学校選択制のデザイン — ゲーム理論アプローチ", NTT 出版, 2010.

[40] Canadian Resident Matching Service, http://www.carms.ca/

[41] Japan Residency Matching Program, http://www.jrmp.jp/

[42] National Resident Matching Program, http://www.nrmp.org/

[43] Scottish Foundation Allocation Scheme (SFAS), http://www.nes.scot.nhs.uk/sfas/About/default.asp